: **Correction de la serie :7 d'éxercices:** L'ordre dans **IR**

Exercice1 : Comparer les réels suivants :1) $\frac{8}{11}$ et $\frac{5}{11}$ 2) $\frac{13}{9}$ et $\frac{13}{6}$ 3) $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$

4) $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$ 5) $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$

Solution : Comparer deux nombres réels *a* et *b*, c'est chercher à savoir quel est le plus grand (Ou s'ils sont égaux).

Comparer *a* et *b* revient à étudier le signe de : *a – b*.

1) On compare $\frac{8}{11}$ et $\frac{5}{11}$

$\frac{8}{11}-\frac{5}{11}=\frac{8-5}{11}=\frac{3}{11}\geq 0$ donc $\frac{8}{11}\geq\frac{5}{11}$

2) On compare $\frac{13}{9}$ et $\frac{13}{6}$

$\frac{13}{6}-\frac{13}{9}=\frac{39-26}{18}=\frac{13}{18}>0$ donc $\frac{13}{6}>\frac{13}{9}$ ou $\frac{13}{6}\geq\frac{13}{9}$

3) On compare $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$

$\frac{-15}{7}-\left(-\frac{15}{4}\right)=\frac{-15}{7}+\frac{15}{4}=\frac{-60+105}{28}=\frac{45}{28}>0$

donc $\frac{-15}{7}>-\frac{15}{4}$ ou $\frac{-15}{7}\geq-\frac{15}{4}$

4) On compare $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$

$\frac{-12}{7}-\frac{15}{4}=\frac{-48-105}{7}=\frac{-165}{28}<0$ donc $\frac{-12}{7}<\frac{15}{4}$ ou $\frac{-12}{7}\leq\frac{15}{4}$

5) on compare $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$

On a :$\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$ et $\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$ et $50-20=30>0$ et puisque $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$ sont positifs alors $5\sqrt{2}>2\sqrt{5}$

Exercice2: Soient *a* et *b* deux réels tel que : $a\leq b$

1) Comparer $\frac{101}{102}et\frac{100}{101}$ 2) Comparer $5a$ et $5b$ 3) Comparer $-13a$ et $-13b$

Solution :1) $\frac{101}{102}-\frac{100}{101}=\frac{101\times101-100\times102}{101\times102}=\frac{10201-10200}{101\times102}=\frac{1}{101\times102}\in\mathbb{R}^+$ Donc : $\frac{101}{102}\geq\frac{100}{101}$

2) On a : $5a-5b=5(a-b)$ et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$

Et on a : $5>0$ donc $5a\leq 5b$

3) On a : $-13a-(-13b)=-13a+13b=-13(a-b)$ et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$

Et on a : $-13<0$ donc $-13a\geq-13b$

Exercice3 : comparer $2a$ et a^2+1 avec $a\in\mathbb{R}$

Solution : $\left(a^2+1\right)-2a=a^2-2a+1=(a-1)^2\geq 0$ Donc : $a^2+1\geq 2a$ si $a\in\mathbb{R}$

Exercice4: $a \in \mathbb{R}$ Comparer : $4a-1$ **et** $4a^2$

Solution : On a $4a^2-(4a-1)=4a^2-4a+1=(2a-1)^2 \geq 0$ Donc : $4a^2 \geq 4a-1$.

Exercice5 : Placez les nombres suivants sur cette "droite" numérique :

-0,5 ; 1,25 ; 2,2 ; 2,8 ; -0.4 ; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{5}$; $-\frac{7}{5}$

Exercice6 : comparer a et b
$a=2+\sqrt{3}$ et $b=2\sqrt{3}$

Solution : $a-b=2-\sqrt{3}$ Nombre positif car $2 \geq \sqrt{3}$ En effet : $2^2=4$ et $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$

Cad : $a-b \in \mathbb{R}^{*+}$ donc : $a \succ b$

Exercice7: Comparer $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{5}$

Solution : comparons : $2\sqrt{3}$ et 5

On a : $5^2=25$ et $\left(2\sqrt{3}\right)^2=4\times3=12$ donc : $5 \succ 2\sqrt{3}$ Par suite : $\frac{1}{5} \prec \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Exercice8 : Soit x un réel tel que : $x \succ -1$

Comparer : 2 **et** $2x+5$ on utilisant les propriétés de l’ordre.

Solution : On a $x \succ -1$ donc : $2x \succ 2\times(-1)$ c’est à dire : $2x \succ -2$

Donc : $2x+5 \succ -2+5$ c’est à dire : $2x+5 \succ 3$ ①

Et on sait que : $3 \succ 2$ ②

Donc : de ① et ② en déduit que : $2x+5 \succ 2$

Exercice9 : Soit x un réel tel que : $x \geq -6$

Comparer : 32 **et** $-5x+1$ on utilisant les propriétés de l’ordre.

Solution : On a $x \geq -6$ donc : $-5x \leq -5\times(-6)$ c’est à dire : $-5x \leq 30$

Donc : ① $-5x+1 \leq 31$ et on sait que : $31 \prec 32$ ②

Donc : de ① et ② en déduit que : $-5x+1 \prec 32$

Exercice10 : Donner un encadrement de $\left(\sqrt{3} \simeq 1.732050808...\right)$et presiser son amplitude

Solution : On a $\left(\sqrt{3} \simeq 1.732050808...\right)$

Donc ① $1.73 \leq \sqrt{3} \leq 1.74$ et ② $1.732 \leq \sqrt{3} \leq 1.733$

① est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ d’amplitude : $1.74-1.73=0.01=10^{-2}$

② est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ d’amplitude $1.733-1.732=0.001=10^{-3}$

Exercice11 :x est un réel tel que $-1 \leq x \leq 2$. On pose B = 2x – 3.

Trouver un encadrement de B et trrouer son amplitude

Solution : On a $-1 \leq x \leq 2$ donc : $-2 \leq 2x \leq 4$

Donc : $-2-3 \leq 2x-3 \leq 4-3$ Donc : $-5 \leq 2x-3 \leq 1$

Donc : $-5 \leq B \leq 1$ son amplitude est : $1-(-5)=1+5=6$

Exercice12 : $1 \le x \le 3$ **et** $2 \le y \le 4$

1) Trouver un encadrement de : x^2 et y^2 et $2x$ et $3y$ et $-x$ et $-y$ et $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ et $\frac{x}{y}$

2) Trouver un encadrement de : $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$ et $B = \frac{2x-1}{x+1}$

Solution : 1) $1 \le x \le 3$ et $2 \le y \le 4$

On a $1 \le x \le 3$ donc $1^2 \le x^2 \le 3^2$ donc $1 \le x^2 \le 9$

On a $2 \le y \le 4$ donc $2^2 \le y^2 \le 4^2$ donc $4 \le y^2 \le 16$

On a $1 \le x \le 3$ donc $2 \times 1 \le 2x \le 2 \times 3$ donc $2 \le 2x \le 6$

On a $2 \le y \le 4$ donc $3 \times 2 \le 3 \times y \le 3 \times 4$ donc $6 \le 3y \le 12$

On a $1 \le x \le 3$ donc $-3 \le -x \le -1$

On a $2 \le y \le 4$ donc $-4 \le -y \le -2$

On a $1 \le x \le 3$ donc $\frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le 1$

On a $2 \le y \le 4$ donc $\frac{1}{4} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2}$

On a $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ donc $1 \times \frac{1}{4} \le x \times \frac{1}{y} \le 3 \times \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{4} \le \frac{x}{y} \le \frac{3}{2}$

2) encadrement de $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$

$6 \le 3y \le 12$ Donc $-12 \le -3y \le -6$

On fait la somme membre a membre on trouve : $1 + 4 + 2 - 12 \le x^2 + y^2 + 2x - 3y \le 9 + 16 + 6 - 6$

Donc ① $-5 \le A \le 25$ ①est un encadrement du réel A

Encadrement de $B = \frac{2x-1}{x+1}$

On a $B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1) \times \frac{1}{x+1}$

et on a $1 \le x \le 3$ donc $2 \le 2x \le 6$ donc $2 - 1 \le 2x - 1 \le 6 - 1$ donc $1 \le 2x - 1 \le 5$ ③

et on a $1 \le x \le 3$ donc $2 \le x + 1 \le 4$ donc $\frac{1}{4} \le \frac{1}{x+1} \le \frac{1}{2}$ ④

On fait la produit membre a membre de ③ et④ on trouve : $1 \times \frac{1}{4} \le (2x-1) \times \frac{1}{x+1} \le 5 \times \frac{1}{2}$

Donc : $\frac{1}{4} \le B \le \frac{5}{2}$ est un encadrement du réel B

Exercice13:1) Vérifier que $14^2 < 200 < 15^2$ et en déduire que ; $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) Trouver un encadrement de : $\sqrt{5}$

3) En déduire un encadrement de : $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$

Solution : 1) on a $14^2 = 196$ et$15^2 = 225$ donc $14^2 < 200 < 15^2$ donc $\sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$

Donc $\sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2}$ donc $14 < \sqrt{2} \times 10 < 15$ donc $14 \times \frac{1}{10} < \sqrt{2} \times 10 \times \frac{1}{10} < 15 \times \frac{1}{10}$

Donc $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) on a $22^2 = 484$ et $23^2 = 529$ donc $22^2 < 500 < 23^2$ donc $\sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$

Donc $22 < \sqrt{5} \times 10 < 23$ donc $22 \times \frac{1}{10} < \sqrt{5} \times 10 \times \frac{1}{10} < 23 \times \frac{1}{10}$ donc $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

3) on a $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ et $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ donc $1,4 + 2,2 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 1,5 + 2,3$

Donc $3,6 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3,8$

On a $1,4<\sqrt{2}<1,5$ et $2,2<\sqrt{5}<2,3$ donc $1,4\times 2,2<\sqrt{2}\times\sqrt{5}<1,5\times 2,3$ donc $3,08<\sqrt{10}<3,45$

Exercice14 :1) -0.25 appartient-il à [−14; 3] ? 2) 3 appartient-il à] 3; 10[?
3) 0 appartient-il à]−5; 2]? 4)105 appartient-il à [−2.7; +∞[?
5) $\sqrt{2}$ appartient-il à]−∞; 1,4] ?

Solution :

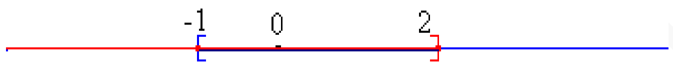
1) $-0,25\in\left]-5;2\right]$ 2) $3\notin\left]3;10\right[$ 3) $0\in\left]-5;2\right]$ 4) $105\in\left[-2,7;+\infty\right[$ 5) $\sqrt{2}\notin\left]-\infty;1,4\right]$

Exercice15 :simplifier si c'est possible
1) [2 ; 5] ∩ [4 ; 6] 2) [2 ; 5] ∪ [4 ; 6]
3)]-∞ ; 2] ∩ [-1 ; +∞[4)]-∞ ; 2] ∪ [-1 ; +∞[

Solution : 1) [2 ; 5] ∩ [4 ; 6] = [4 ; 5]

2) [2 ; 5] ∪ [4 ; 6] = [2 ; 6].

3)]-∞ ; 2] ∩ [-1 ; +∞[= [-1 ; 2]



4)]-∞ ; 2] ∪ [-1 ; +∞[=]-∞ ; +∞[

Exercice16 :calculer $I\cap J$ et $I\cup J$ dans les cas suivants

$J=\left[-1,+\infty\right[$ et $I=\left]-3,7\right]$

$J=\left[4;10\right]$ et $I=\left]-\infty,5\right[$

$J=\left[-5;-1\right]$et $I=\left[0,10\right[$

$I=\left[\frac{-2}{3},2\right]$ et $J=\left]-1,\frac{3}{2}\right[$

Solution : $I\cap J=\left]-1,7\right]$ et $I\cup J=\left]-3;+\infty\right[$

$I\cap J=\left[4,5\right[$ et $I\cup J=\left]-\infty;10\right]$

$I\cap J=\varnothing$ et $I\cup J=\left[-5;10\right]$

$I\cap J=\left[-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right[$ et $I\cup J=\left]-1,2\right]$

Exercice17 : Représenter chaque inégalité ou encadrement par l'intervalle qui convient ;
1) $x\geq -3$ 2) $x<5$
3) $1\leq x\leq 4$ 4) $0<6x-2\leq 10$

Solution : 1) $x\geq -3$ ssi $x\in\left[-3,+\infty\right[$

2) $x<5$ ssi $x\in\left]-\infty,5\right]$

3) $1\leq x\leq 4$ ssi $x\in\left[1,4\right]$

4) $0<6x-2\leq 10$ ssi $2\times\frac{1}{2}<6x\times\frac{1}{2}\leq 12\times\frac{1}{2}$

ssi $1<3x\leq 6$ ssi $1\times\frac{1}{3}<3x\times\frac{1}{3}\leq 6\times\frac{1}{3}$ ssi $\frac{1}{3}<x\leq 2$ ssi $x\in\left]\frac{1}{3},2\right]$

Exercice18 : Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}x\geq -3\\ x\succ 2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x\succ 5\\ x\leq 4\end{cases}$

Solution : $\left\{ \right.$ c'est l'intersection

1) $\begin{cases} x \geq -3 \\ x \succ 2 \end{cases}$ $x \geq -3$ ssi $x \in [-3,+\infty[$ et $x > 2$ ssi $x \in]2,+\infty[$

$S =]2,+\infty[\cap [-3,+\infty[=]2,+\infty[$

2) $\begin{cases} x \succ 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$ $x \leq 4$ ssi $x \in]-\infty,4]$ et $x \succ 5$ ssi $]5,+\infty[$ $S =]5,+\infty[\cap]-\infty,4] = \varnothing$

Exercice19 : Calculer les expressions suivantes (éliminer le signe de valeur absolue)

1)$|-3|$ 2)$|3|$ 3) $\left|-\frac{3}{5}\right|$ 4) $\left|\sqrt{5}-2\right|$ 5)$\left|1-\sqrt{3}\right|$

6) $|\pi-4|$ 7) $\left|\sqrt{2}-\sqrt{7}\right|$ 8) $\left|3-2\sqrt{3}\right|$

9) $A = \left|4-2\sqrt{3}\right| - \left|5-3\sqrt{3}\right| + \left|9-5\sqrt{3}\right|$

Solution : 1) $|-3| = -(-3) = 3$ 2) $|3| = 3$ 3) $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$

4)$\left|\sqrt{5}-2\right|$ on compare : $\sqrt{5}$ et 2

On a $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ et $(2)^2 = 4$ donc $\sqrt{5} > 2$ par suite $\left(\sqrt{5}-2\right) \in \mathbb{R}^{+*}$ Donc $\left|\sqrt{5}-2\right| = \sqrt{5}-2$

5) $\left|1-\sqrt{3}\right|$ on compare : $\sqrt{3}$ et 1

On a $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ et $(1)^2 = 1$ donc $\sqrt{3} > 1$ par suite $\left(1-\sqrt{3}\right) \in \mathbb{R}^{-*}$ donc :$\left|1-\sqrt{3}\right| = -\left(1-\sqrt{3}\right) = -1+\sqrt{3}$

6) $|\pi-4| = -(\pi-4) = -\pi+4$ car $4 > \pi$

7) $\left|\sqrt{2}-\sqrt{7}\right|$ on compare : $\sqrt{7}$ et $\sqrt{2}$

On a $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ et $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ donc $\sqrt{7} > \sqrt{2}$

Par suite $\sqrt{2}-\sqrt{7} < 0$ Donc $\left|\sqrt{2}-\sqrt{7}\right| = -\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right) = -\sqrt{2}+\sqrt{7}$

8) on a $3 < 2\sqrt{3}$ car $3^2 < \left(2\sqrt{3}\right)^2$ Donc : $3-2\sqrt{3} \in \mathbb{R}^-$

Donc ; $\left|3-2\sqrt{3}\right| = -\left(3-2\sqrt{3}\right) = -3+2\sqrt{3}$

9)on a : $\sqrt{5} > \sqrt{2}$ donc : $\sqrt{5}-\sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$ donc : $\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right| = \sqrt{5}-\sqrt{2}$

$A = \left|4-2\sqrt{3}\right| - \left|5-3\sqrt{3}\right| + \left|9-5\sqrt{3}\right|$ $A = 4-2\sqrt{3} - -\left(5-3\sqrt{3}\right) + \left(5\sqrt{3}-9\right)$ $A = 4-2\sqrt{3}+5-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}-9 = 0$

Exercice20 :1) Calculer $\left(3\sqrt{2}-5\right)^2$

2) Comparer : $3\sqrt{2}$ et 5 3) Simplifier $\sqrt{43-30\sqrt{2}}$

Solution : 1)$\left(3\sqrt{2}-5\right)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 2\times 3\sqrt{2}\times 5 + (5)^2 = 18-30\sqrt{2}\times 5+25$

$\left(3\sqrt{2}-5\right)^2 = 43-30\sqrt{2}$

2) $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$ et $(5)^2 = 25$ Donc $3\sqrt{2} > 5$ donc $3\sqrt{2}-5 \in \mathbb{R}^-$

3)$\sqrt{43-30\sqrt{2}} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}-5\right)^2} = \left|3\sqrt{2}-5\right| = -\left(3\sqrt{2}-5\right)$ car $3\sqrt{2}-5 \in \mathbb{R}^-$ donc $\sqrt{43-30\sqrt{2}} = -3\sqrt{2}+5$